

2. Pitágoras & La música

3. Resumen

Para Pitágoras los números son el principio absoluto en la Aritmética, principios aplicados en la música, magnitudes en el reposo en la Geometría, magnitudes en movimiento en la astronomía.

En éste trabajo de investigación titulado “**Pitágoras & La música**”, cuyo objetivo es **encontrar la relación que se tiene entre la música y las matemáticas**, observando precisamente un punto de vista de Pitágoras, por lo cual se plantea el problema de recabar e investigar información acerca del planteamiento que Pitágoras hacia las matemáticas y la música se unen en el concepto de armonía que significa, proporción de las partes de un todo., partiendo de los experimentos de Pitágoras, que realizó con el monocordio, que descubrió que pulsada la cuerda al aire emite un sonido (una nota) y que si se divide a la mitad su longitud la nota es exactamente la misma, pero una octava más alta (más aguda); finalmente si se divide en tres o en cuatro, la armonía se mantiene.

En el desarrollo del trabajo, se deducirá lo que Pitágoras descubrió al dividir una cuerda en ciertas proporciones y producir música de esta, para formar lo que son los sonidos armónicos y explicar los fundamentos matemáticos en relación con la música, es decir, considerando las **medias aritméticas, geométricas y las armónicas**.

Con lo anterior se comprenderá los componentes que posee la música con sus sonidos que la vuelven única, para dar lugar a las **siete notas** de la **escala diatónica** y las razones de las cuerdas, de acuerdo a Pitágoras.

4. Introducción

En el sentido pitagórico se establecía que en el universo así como lo dijimos en el planteamiento del problema Pitágoras decía que había un paralelismo entre los intervalos acústicos considerados como base de la música y las distancias que nos separan de los planetas. Así, de la Tierra a la Luna habría un tono; de la Luna a Mercurio un semitono; otro de Mercurio a Venus; y de Venus al Sol un tono y medio; por tanto entre el Sol y la Tierra existiría una separación correspondiente al intervalo de quinta, y habría una distancia correlativa del intervalo de cuarta desde la Luna al Sol.

Pero armonía quiere decir también afinación de un instrumento musical con cuerdas de diferente tirantez, llegando a significar la escala musical (s. V). Pitágoras afirmaba que "la tonalidad del universo era armonía y número". El número, alude al aspecto visual, geométrico y astronómico de los cuerpos del Cosmos, que es comparado con un inmenso teatro. La armonía alude al sonido de los instrumentos afinados que hacen del Cosmos una orquesta sinfónica.

Esa doctrina nos enseña a aprender mirando al cielo y escuchando la música callada de las esferas celestes. Porque el cielo es número y armonía, y también es música, que sólo quien sabe guardar silencio como Pitágoras es capaz de escuchar. Pitágoras "oía incluso la armonía del todo: aquella que contenía la armonía universal de las esferas y de los astros que se mueven dentro de dichas esferas (Lo demostró en la Figura 1), armonía que las deficiencias de nuestra naturaleza nos impiden percibir". Así lo definía Pitágoras esas eran sus expresiones en su época pero más adelante seguiremos hablando de Pitágoras con relación a la música.

Fig. 1 Armonía entre esferas y astros



4.1. Marco teórico. Bases teóricas en las que sustente a la investigación

Pitágoras: (Figura 2) Filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática, la geometría y la aritmética, derivadas particularmente de las relaciones numéricas, y aplicadas por ejemplo a la teoría de pesos y medidas, a la teoría de la música o a la astronomía.

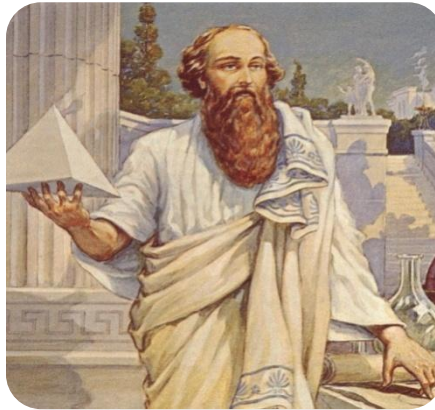


Fig. 2 Pitágoras

En que atribuyó Pitágoras: Se le atribuye a Pitágoras la teoría de la significación funcional de los números en el mundo objetivo y en la música; otros descubrimientos, como la inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado o el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, fueron probablemente desarrollados por la escuela pitagórica.

Pitágoras y la música: Se le adjudica a Pitágoras el descubrimiento de las leyes de los intervalos musicales regulares, es decir, las relaciones aritméticas de la escala musical. Diógenes Laercio le atribuye la invención del monocordio (Figura 3), un instrumento musical de una sola cuerda. Ilustra la ley según la cual «la altura del sonido es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda».

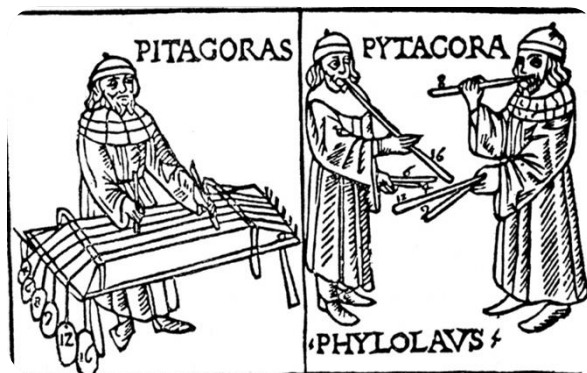


Fig. 3 Monocordio

Pitágoras y sus principios en la música: Los principios de la música fueron sin duda tan importantes para el sistema pitagórico como los principios matemáticos mismos, o las nociones sobre «números». La expresión de la Naturaleza en términos matemáticos -como las proporciones y las razones- es una idea clave dentro de la filosofía desarrollada por los pitagóricos. «Estos filósofos notaron que todos los modos de la armonía musical y las relaciones que la componen se resuelven con números proporcionales».

Afinación pitagórica: Es una gama musical construida sobre intervalos de quintas perfectas de razón 3/2. Las frecuencias pitagóricas de la nota «Do» son las siguientes: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 (Como se muestra en la Figura 4). Para los pitagóricos la música poseía además un valor ético y medicinal, « [Pitágoras] hacía comenzar la educación por la música, por medio de ciertas melodías y ritmos, gracias a los cuales sanaba los rasgos de carácter y las pasiones de los hombres, atraía la armonía entre las facultades del alma».

<u>Escala según Pitágoras</u>		
NOTA	RELACIÓN (con la nota anterior)	BASE (Hz)
DO		1000
RE	9/8	1125
MI	9/8	1265,625
FA	256/243	1333,33333
SOL	9/8	1500
LA	9/8	1687,5
SI	9/8	1898,4375
DO	256/243	2000
RE	9/8	2250
MI	9/8	2531,25
FA	256/243	2666,66666
FA	256/243	2666,66666
MI	9/8	2531,25
RE	9/8	2250
DO	256/243	2000

Fig. 4.
Frecuencias
Pitagóricas

La **media armónica** de dos números “a” y “b” se define como: $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, también se define como el inverso de la media aritmética de “a” y “b”.

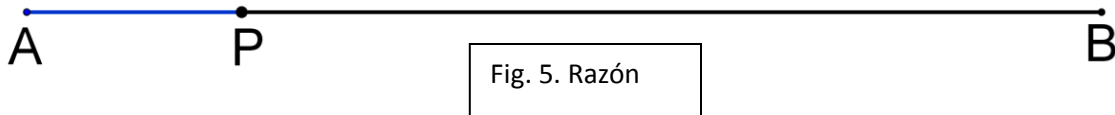
La **media Aritmética (promedio)** de dos números “a” y “b” se define como: $\frac{a+b}{2}$

Una escala música, es la sucesión ordenada de las notas musicales.

Escala natural: También llamada **diatónica** o heptatónica. Es la usada en la música occidental. Está formada por las siete notas naturales, que normalmente se presentan en el siguiente orden: do, re, mi, fa, sol, la y si.

Razón en que un segmento es dividido por uno de sus puntos: Todo punto P que está sobre un segmento con extremo A y B, lo divide en dos segmentos como lo observamos en la figura (5). Estos segmentos son \overline{AP} y \overline{PB} .

Se pueden encontrar las siguientes razones:



1.- A la razón formada por \overline{AP} y \overline{PB} : $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$

2.- A la razón formada por \overline{AP} y \overline{PB} : $\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}}$

3.- A la razón formada por \overline{AP} y \overline{AB} : $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$

4.- A la razón formada por \overline{PB} y \overline{AB} : $\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$ (es la razón en la que nos enfocaremos en todo el trabajo)

Ejemplos de razones, de acuerdo a la figura 6:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = \frac{4}{1}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$$

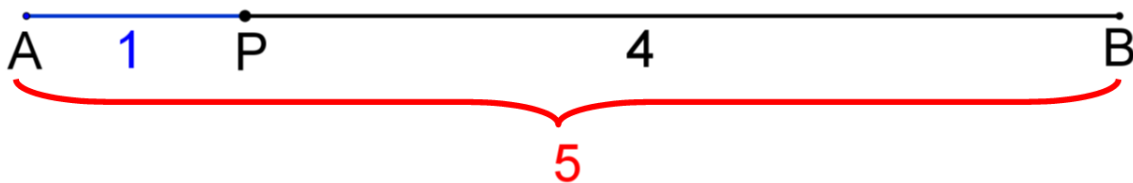


Fig. 6 Ejemplo de razones

4.2. Objetivo de la investigación.

Encontrar la relación que se tiene entre la música y las matemáticas, observando precisamente un punto de vista de Pitágoras.

Saber qué es lo que hace a ciertos sonidos más agradables al oído.

Conocer varios aspectos del sonido producido por tocar una cuerda o cualquier otro instrumento (longitud, grosor y tensión de la misma).

Deducir lo que Pitágoras descubrió al dividir una cuerda en ciertas proporciones y al producir música de esta, realiza lo que son los sonidos armónicos.

Conocer una serie de experimentos que realizó Pitágoras para poder dar fundamentos matemáticos en relación con la música.

Comprender los componentes que posee la música con sus sonidos que la vuelven única.

4.3. Problema

Recabar e investigar información acerca del planteamiento que Pitágoras hacia: Las matemáticas y la música se unen en el concepto de armonía que significa, en primer lugar, proporción de las partes de un todo. Sabiendo que Pitágoras fue el primero en llamar cosmos al conjunto de todas las cosas, debido al orden que existe en éste. Este orden por el que se rige el Cosmos es dinámico: El universo está en movimiento y es el movimiento de los astros y de las fuerzas que los mueven el que se ajusta en un todo armónico. Así, si el Cosmos es armonía (Ilustrado en la Figura 7), también el alma es armonía, para los pitagóricos. Las matemáticas y la música, lo que se aprende por los ojos, y lo que se aprende por los oídos, constituyen los dos caminos para curación del alma.



Fig. 7 Armonía entre planetas

4.4. Hipótesis

Como es evidente, en Grecia es donde se conciben los primeros nexos de unión entre la música y las matemáticas, coincidiendo los primeros signos de teorización de las dos disciplinas. Fue el célebre Pitágoras quien encontró la proporción

numérica que es responsable de las armonías musicales. Investigó una cuerda de una tira y descubrió que pulsada al aire emite un sonido (una nota), y que si se divide a la mitad su longitud la nota es exactamente la misma, pero una octava más alta (más aguda). Y si se divide en tres o en cuatro, la armonía se mantiene. La música para la escuela pitagórica fue fundamental, en especial porque le permitió enlazar la matemática con el arte, y desde allí extender sus teorías hasta los límites últimos del universo. Los pitagóricos proclamaron abiertamente que “todo es número” y se abocaron a explicar el universo en términos matemáticos. Lo increíble es que lo hicieron en clave musical; según Pitágoras, el movimiento de las esferas es armónico, y genera una melodía constante, llamada Música de las esferas.

5. Desarrollo

Método y técnicas utilizadas



Fig. 8 Monocordio

Pitágoras en sus pruebas con el monocordio, un rudimentario instrumento de una sola cuerda y una pequeña caja de resonancia que permite variar la longitud de la cuerda mediante un diapasón (“día”, significa “por” y “pason”, “todo”), llegó a la conclusión de que determinados cambios en la longitud de la cuerda proporcionaba sonidos “armónicos” entre sí. Este descubrimiento era una maravillosa confirmación de su teoría de que números y belleza eran uno y de que el mundo físico y el emocional podían ser descritos con números sencillos: existía una relación armónica entre todos los fenómenos perceptibles.

El sonido de las notas, no depende de la longitud de la cuerda o de su material, sino tan solo de la razón entre las dos longitudes; aunque no sepamos cual es la nota que produce una cuerda.

Pitágoras estaba influenciado por sus conocimientos sobre las medias aritméticas, geométricas, armónicas y el misticismo de los números naturales, especialmente los cuatro primeros (tetrakis). Encontró los datos de la siguiente tabla 1:

Razones	Longitud de la cuerda y aspecto matemático	Intervalos	Notas de la escala diatónica
1:1	(un extremo 1),	Unísono	Do
1:2	(los extremos es 1 y 2)	Octava	Do
2:3	(media armónica de 1 y ½) $\frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{2}{1}} = \frac{2}{3}$ <p>ó también es el inverso de la media aritmética</p> $\frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$ <p>el inverso es $\frac{2}{3}$,</p>	Quinta	Sol
3:4	(media aritmética de 1 y ½) $\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{4}$	Cuarta	Fa

Tabla 1. Razones de las longitudes de las cuerdas. Primera parte.

Con ésta idea construyó una escala griega de siete notas a partir de estas razones. Esta escala se conoce como afinamiento “**Pitagórico**”

Relación numérica y el monocordio de Pitágoras.

Pitágoras inventó un instrumento de una sola cuerda, el monocordio, que permite cambiar la longitud de la cuerda para obtener diferentes sonidos.

Con este instrumento Pitágoras pudo obtener las siete notas de la escala y construir la escala natural o de sonidos diatónicos. (Tabla 2)

Razones	Longitud de la cuerda y aspecto matemático	Intervalos	Notas
4:5	<p>Media armónica de 1 y $\frac{2}{3}$ es:</p> $\frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$	Tercera Mayor	Mi
8:9	<p>Media aritmética de 1 y $\frac{1}{2}$ es $\frac{3}{4}$ Media armónica de 1 y $\frac{1}{2}$ es: $\frac{2}{3}$ media</p> $\frac{\text{media armónica}}{\text{media aritmética}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{9}$	Tono	Re
16:27	<p>En la cuerda con extremos en sol ($\frac{2}{3}$) y en do ($\frac{1}{2}$), hay dos notas, por lo cual se divide en tres parte, una se encuentra a $\frac{2}{3}$ de Do y con longitud $\frac{8}{9}$, esto es:</p> $\frac{8}{9} \text{ de } \frac{2}{3}, \text{ es decir, } \left(\frac{8}{9}\right) * \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{27},$	Sexta	La
128:243	<p>En la cuerda con extremos en La $\frac{16}{27}$ y Do ($\frac{1}{2}$), se encuentra sólo una nota con longitud $\frac{8}{9}$, esto es:</p> $\frac{8}{9} \text{ de } \frac{16}{27}, \text{ es decir, } \left(\frac{8}{9}\right) * \left(\frac{16}{27}\right) = \frac{128}{243},$	Séptima	Si

Tabla 2. Razones de las longitudes de las cuerdas. Segunda parte.

Por ejemplo, si presionas la cuerda en una tercera parte de su longitud, y la haces vibrar, el tono resultante será el intervalo de una quinta arriba del tono de la misma

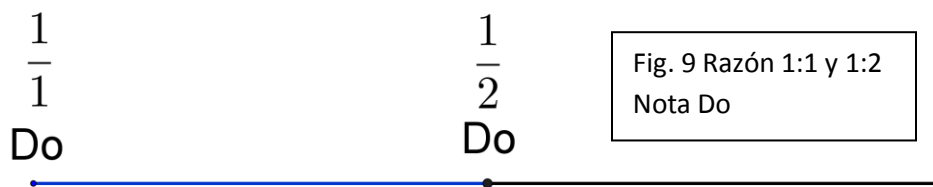
cuerda al vibrar libremente. La importancia de su invento era que el hombre reconoce, o experimenta, como bellos, sólo algunos intervalos específicos. Los pitagóricos llamaron a estos intervalos **synphon**, tal como se muestran en las tablas anteriores

Además, también tenemos la proporción 5:6, que es la tercera menor. Tabla 3.

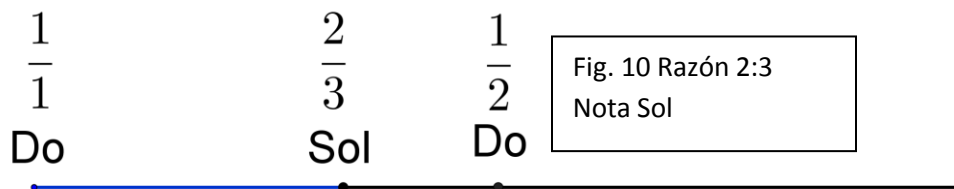
Razones	Longitud de la cuerda y aspecto matemático	Intervalos	Notas
5:6	(media armónica de 1 y 1/2) y Media armónica de 1 y 2/3 es: $\frac{\text{media armónica}}{\text{media aritmética}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$	Tercera menor	La

Tabla 1. Razones de las longitudes de las cuerdas. Tercera parte.

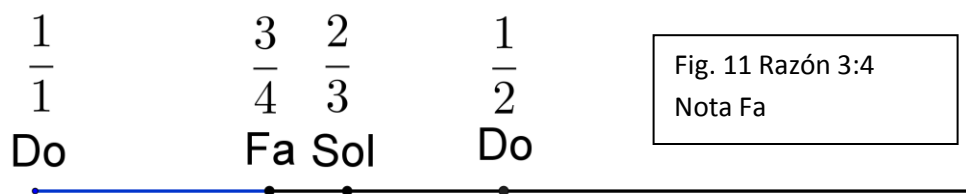
Gráficamente se vería las razones de la siguiente manera (Figura 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15)



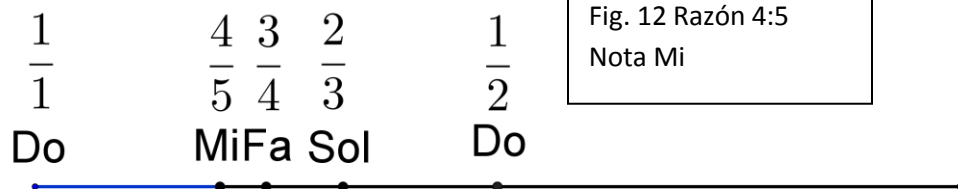
2:3



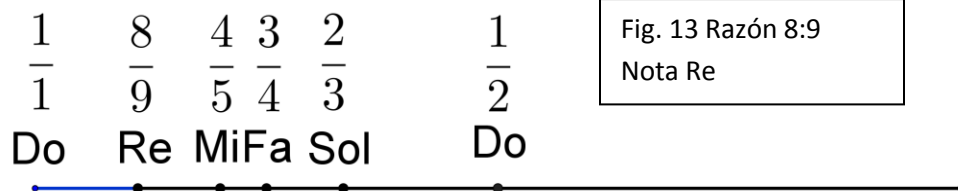
3:4



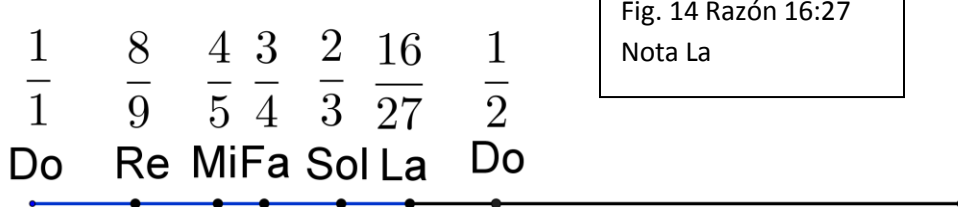
4:5



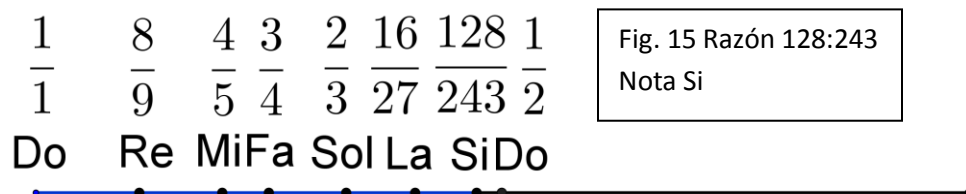
8:9



16:27



128:243



Supongamos que la nota original dada por la cuerda del monocordio es una nota Do con una frecuencia de 261 Hz. así la primera nota armoniosa la encontraríamos cuando estuviéramos a $\frac{4}{5}$ de la longitud inicial y correspondería a la nota Mi, el tercer armónico cuando estuviéramos a $\frac{2}{3}$ de la longitud inicial y

correspondería a la nota Sol, y el próximo armónico cuando la longitud de la cuerda fuese la mitad de la original, aquella nota sería nuevamente un Do pero de frecuencia el doble de la primera y sería llamado la octava. La segunda y tercera nota armoniosa se llamarían tercera y quinta respectivamente.

1. Como se observa en la figura 8 y 16, el monocordio es un instrumento musical de una sola cuerda que acompañaba la monodia al unísono, que es utilizado para probar la proporción y variedad de los sonidos. La música está formada por compases, tiempos, es decir, hacer una obra melódica es como resolver una ecuación en la que debes decidir en un compás de N tiempos, como vas a completar ese número de tiempos y, para ello, existen una infinidad de posibilidades.
2. De acuerdo a la tabla, se puede observar la diferente frecuencia de las diferentes notas que se pueden manejar (en este caso, en el monocordio), y que estas a su vez, dependen de la longitud de la cuerda al tirar de esta; tal como se muestra en la siguiente tabla.

<i>Nota</i>	<i>Frecuencia_[2]</i>	<i>Longitud de la cuerda</i>
Original	f	L
Octava	$2f$	$1/2 \cdot L$
Quinta	$3/2 \cdot f$	$2/3 \cdot L$
Tercera	$5/4 \cdot f$	$4/5 \cdot L$

Tabla 4. Frecuencia y longitud de la cuerda

3. Por ejemplo para una cuerda de longitud 100 cm, podemos obtener las siguientes longitudes de la cuerda, como se muestra la siguiente tabla 5.

Intervalo	Longitud (cm)	Nota
Primera	$L = 100$	Do
Segunda	$\left(\frac{8}{9}\right) * L = 88.\bar{8}$	Re

Tercera	$\left(\frac{4}{5}\right) * L = 80.0$	Mi
Cuarta	$\left(\frac{3}{4}\right) * L = 75.0$	Fa
Quinta	$\left(\frac{2}{3}\right) * L = 66.\bar{6}$	Sol
Sexta	$\left(\frac{16}{27}\right) * L = 59.\overline{259}$	La
Séptima	$\left(\frac{128}{243}\right) * L = 52.674$	Si
Octava	$\left(\frac{1}{2}\right) * L = 50.0$	Do

Tabla 5. Longitudes de cuerda de 100 cm

6. RESULTADOS

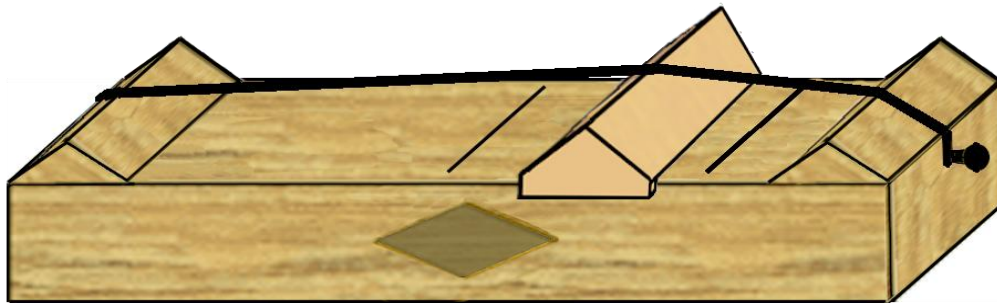


Fig. 16 Monocordio

Con el uso de un monocordio se observó la relación entre la longitud de la cuerda vibrante con las notas de la escala musical. Para ello se observó las frecuencias que emitían cada sonido, los de baja caracterizaban a los tonos graves, mientras que los de alta correspondían a los tonos agudos. Tras tensar las cuerdas y resultado de estas mismas Pitágoras logra descubrir que la octava tenía una proporción matemática de $2/1$. Obteniendo así un Do agudo y un Do grave. Tras esta observación Pitágoras dividió la cuerda en ciertas proporciones simples de $2/1$, $3/2$, $4/3$, etc, consiguiendo así la tercer nota (Sol) en longitud de $2/3$ de Do, y con otra cuerda de longitud de $3/4$ partes obtuvo Fa, como se observa en el

esquema 1. Observado y analizando las proporciones, Pitágoras logra obtener como resultados las cuatro restantes: Re, Mi, La y Si.

Las **siete notas**, de la **escala diatónica** y las razones de las cuerdas, de acuerdo a Pitágoras, se pueden representar mediante la siguiente imagen:

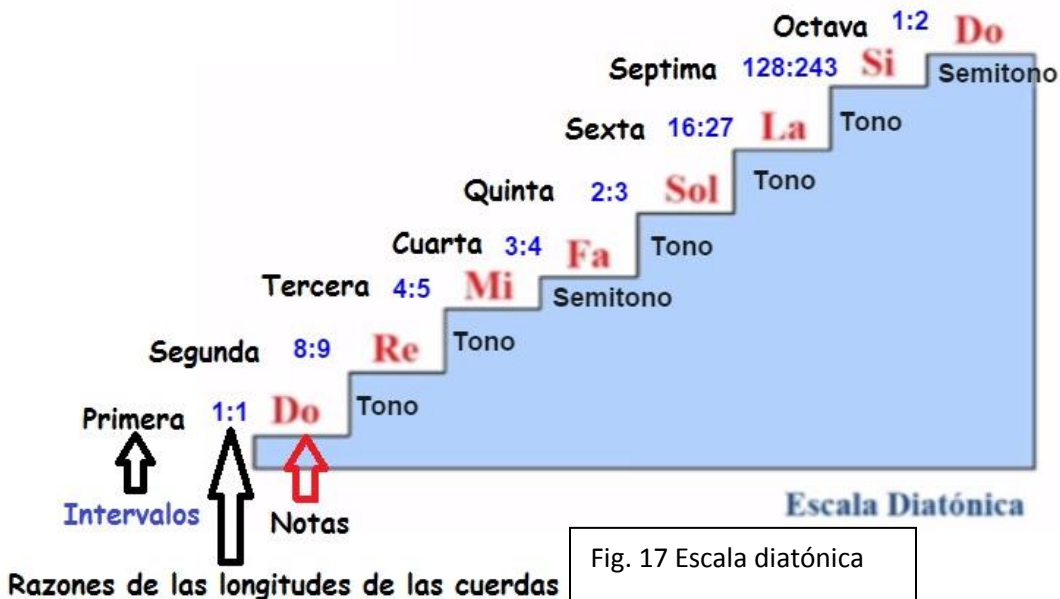


Fig. 17 Escala diatónica

7. Análisis e interpretación de de resultados

Al descubrimiento de la octava fue debido a que al tensar dos cuerdas, una el doble de larga que la otra, y al hacerlas vibrar noto como ambas emitían la misma nota, una sonando superior que la otra.

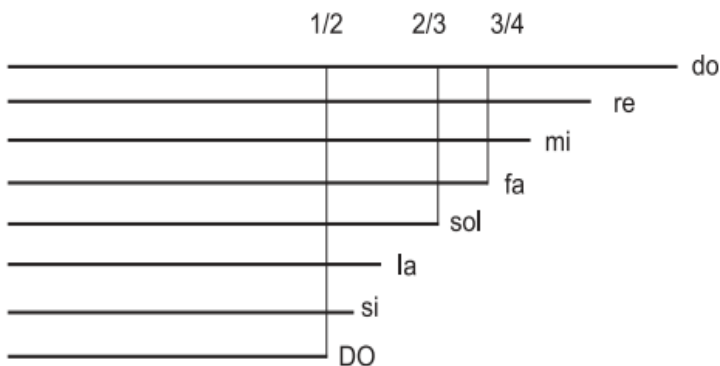


Fig. 18 Longitud de cuerdas

Para analizar los resultados de las cuatro restantes notas Pitágoras observo la proporción existente entre Fa y Sol, conocido como tono, así que aumenta un tono a partir de Do grave obteniendo el Re, y así continuo hasta lograr un Mi. Para lograr La y Si incrementó dos tonos desde Sol.

8. Conclusiones

Pitágoras logra descubrir que el sonido provocado por una cuerda depende de la longitud de esta misma. Cuando la cuerda pulsada se divide en porciones de cierta longitud determinada surgen ocho sonidos (las ocho notas de la escala musical).

Tras una serie de experimentos realizados donde el mismo había tensado cuerdas, para después lograr argumentar y dar fundamentos matemáticos en relación con la música. Gracias a esto logro observar y analizar que en ciertos casos estaba la existencia de una relación sobre los sonidos emitidos por la cuerda y la división de esta misma en diferentes proporciones. Establece con ello una serie de fundamentos donde la tensión de la cuerda y la propagación y frecuencia de un sonido estaban relacionadas.

Tras experimentar no solamente con un instrumento, sino con varios, logra comprender la relación de las matemáticas fundamentadas dentro de la música, dando explicación lógica del por qué la variedad de sonidos, a diferentes tensiones. Se conoció que las razones subyacentes a intervalos de cuarta, quinta y octava se pueden observar en cualquier instrumento. Esto fue logrado debido a una clara proporción entre los espacios de las cuerdas, para conocer así más acerca de los misterios y encantos sonoros de la música. Para mayor entendimiento, puedes consultar nuestras fuentes bibliográficas.

9. Fuentes información

1. Amaya Miguelina, Santana Barbosa Francisco, Dopo la sei: recursos para aprender Plástica y Música: Pitágoras & el monocordio, Santiago de Chile,

Consultado el 12 de septiembre del 2014 en:
<https://sites.google.com/site/dopolesei/instrumentos-musicales/1-pitagoras-y-el-monocordio>

2. Amster, Pablo, ¡Matemática, maestro!: Un concierto para números y orquesta, 1ª ed, Buenos Aires, Siglo XX, Colección ciencia que ladra, 2010, 7p – 70p.
3. Camacho Reyes, Rodolfo Mendoza Rosendo, Pitágoras & la escala musical, Barcelona, España, (Universidad de Barcelona), Consultado el 15 de Noviembre del 2014 en:
<http://www.midebien.com/boletin/002/pitagorasysuescalamusical.pdf>
4. Enrique Alexandre, “Matemáticas, Música: Pitágoras, Las matemáticas y la música.” (Doctor Ingeniero de Telecomunicación por la Universidad de Vigo, 2004.) Universidad de Alcalá, España. Consultado el 20 de noviembre del 2014 en <http://enriquealexandre.es/2013/02/20/pitagoras-las-matematicas-y-la-musica/>
5. Euterpe y Pitágoras, consultado en <http://filomusica.com/filo11/paula.html> el día 20 de febrero de 2015
6. Musixa, consultado en http://www.anarkasis.net/pitagoras/032_orig/, día 25 de febrero de 2015
7. Pitágoras y el número consultado en <http://www.pudh.unam.mx/perseo/?p=2061> El día 10 de febrero de 2015
8. Pitágoras y la armonía música, consultado en <http://es.wikipedia.org/wiki/Pit%C3%A1goras> el día 5 de febrero de 2015
9. Popoca Yáñez, Ma. Victoria et, Paquete didáctico de matemáticas III, CCH, consultado en http://www.matepop.com.mx/index.php?option=com_phocadownload&view=category&id=4:paquetem3-2007&Itemid=100
10. Tiembla, Alfredo, et, El número en la Naturaleza, Editorial CCS, Serie Hernández Pacheco, Alcalá, Madrid, 2012, 166p – 171p.