CARÁTULA DE TRABAJO

MOSAICOS A TRAVÉS DE TESELACIONES

Título del trabajo

LA BELLEZA DE LA MATEMÁTICAS

Pseudónimo de integrantes

MATEMÁTICAS	LOCAL	INVESTIGACIÓN DOCUMENTAL
ÁREA	*CATEGORÍA*	*MODALIDAD*

0625344

Folio de Inscripción

Título: Mosaicos a través de teselaciones

Resumen

En este trabajo explicamos cómo el arte y las matemáticas se relacionan a través de las construcciones geométricas llamadas teselaciones. Presentamos la clasificación de las teselas y su combinación para formar los denominados mosaicos y así desarrollar modelos apropiados como ejemplificación basándonos en las reglas matemáticas y el comportamiento geométrico con uno o más polígonos regulares.

A través de la intervención de los mosaicos buscamos demostrar las múltiples formas e influencia que tiene las matemáticas en rubros geométricos y algebraicos en fenómenos cotidianos. Y de esta manera poder desarrollar una figura por medio de teselaciones regulares al nivel de llegar a formar un mosaico.

INTRODUCCION

Marco Teórico

En sus orígenes las matemáticas se desarrollaron para resolver necesidades prácticas de la vida cotidiana como contar o medir, pero que ahora son una extensa colección de disciplinas y sus resultados representan el esfuerzo de más de 4000 años de pensamiento. La manifestación del arte desde las antiguas civilizaciones se puede constatar en los adornos de las edificaciones antiguas. Las diversas influencias de elementos cotidianos de ciertas formas llamativas como lo son las pavimentaciones, los adornos, e incluso de fenómenos naturales expresados en el ambiente como las celdillas de las abejas, nos llevaron a estudiar la naturaleza de esos fenómenos por medio de un cierto comportamiento matemático llamado teselaciones.

Las matemáticas son una ciencia viva y bella, acercarse a ellas permite entenderlas y estimular su desarrollo. * La belleza en matemáticas produce una sensación como la que puede provenir del arte, la pintura, la música o la contemplación de un paisaje natural. Aunque la matemática en su construcción y desarrollo, tiene bastante de arte, para poder apreciar la belleza es necesaria la comprensión de los conceptos que intervienen. Y es a partir de elementos inicialmente dispersos y sin relación, que es capaz de crear una composición altamente bella y compleja que armoniza los elementos y los muestra como parte de un todo; demostrando la comprensión profunda de los elementos y sus relaciones entre ellos.
Así pues, en matemáticas, no es posible hablar de belleza sin comprensión. Y en las teselaciones se mezcla gran variedad de conceptos, lo racional y lo irracional, los conceptos geométricos y los analíticos. Todo en una mezcla que nos brinda una infinita posibilidad de combinaciones en formas, estados y artes llamada teselaciones.

Un mosaico, es una obra pictórica elaborada con pequeñas piezas similares de diversas formas y colores, llamadas teselas, unidas para formar composiciones decorativas geométricas o figurativas.

La tesela es una pequeña pieza que se utiliza para confeccionar un mosaico. Una teselación es una construcción de polígonos regulares o irregulares que al juntarlos sin suponerse no dejan huecos entre sí, para cubrir un plano, se puede decir que es posible cubrir el piso con polígonos de n lados sin que haya huecos ni traslapes. Si y solamente si n= 3, 4,6. Existen 17 tipos de simetrías del plano euclidiano.

Un mosaico es una construcción con varios polígonos regulares o irregulares que se combinan para cubrir el plano, son básicamente teselaciones no periódicas.

Es decir la teselación utiliza como base un sólo polígono y el mosaico utiliza más de un polígono, sobre todo en sus vértices.

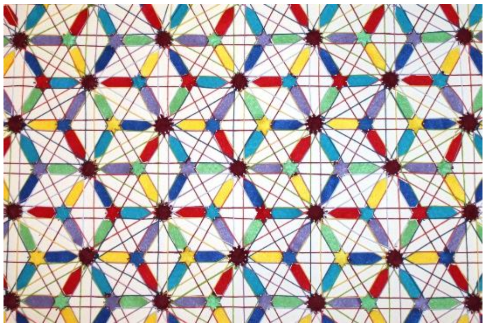


FIG 1. Ilustración de un mosaico

Antecedentes

Los romanos elaboraban los mosaicos con estas pequeñas piezas llamadas teselas, de ahí que se refirieron a ellos también como opus o ars tessellatum. Las teselas son piezas de forma cúbica, hechas de rocas calcáreas o materiales de vidrio o cerámicas, muy cuidadas y elaboradas y de distintos tamaños. En el mundo griego fue muy frecuente y desde muy temprano (desde fines del siglo V a. C.) el pavimento compuesto por guijas de río (piedrecillas que se encuentran en las orillas) de tamaños y de colores distintos.

Los romanos llegaron a dominar el trabajo hecho con las teselas. Las primeras obras se hacían con teselas muy pequeñas y ya en época imperial el tamaño se hizo mayor, de un centímetro cuadrado.

FIG 2 Parte de un mosaico romano del puerto de Ostia (Roma) del siglo II a.C

En 1936 Alan Turing demostró la existencia de problemas o situaciones para los que no existen algoritmos finitos; entre estos problemas, que engrosaron los indecidibles de Gödel, se encuentran algunas cuestiones que plantean las teselaciones Aperiódicas o No Periódicas. Más recientemente se ha sumado a éstos “indecidibles”, el problema de si las ecuaciones diofánticas, -Sistemas de ecuaciones polinómicas de coeficientes enteros con soluciones enteras- poseen o no tales soluciones. En estos momentos no existe ningún argumento matemático fiable que avale tal cuestión.

Sin embargo, el ambiente geométrico en el que se desarrollan las teselaciones del plano y del espacio están gobernadas por este tipo de ecuaciones y gran número de ellas se encuentran determinadas de forma precisa.

Tipos de teselaciones

Una teselación se denomina “periódica” cuando podemos delimitar en la región que pavimenta el plano por traslación, desplazando la ubicación de la región sin someterla a giros ni simetrías. Se denomina regular, si está realizada por un tipo de polígonos regulares Todo polígono regular puede ensamblarse con otros de su misma especie o de distinta siempre que los ángulos de cada uno sumen cuatro rectos.

$$\Pi (x_1 - 2) / x_1$$

A partir de la fórmula que proporciona el ángulo interior formado por los lados contiguos de un polígono regular de x_1 lados

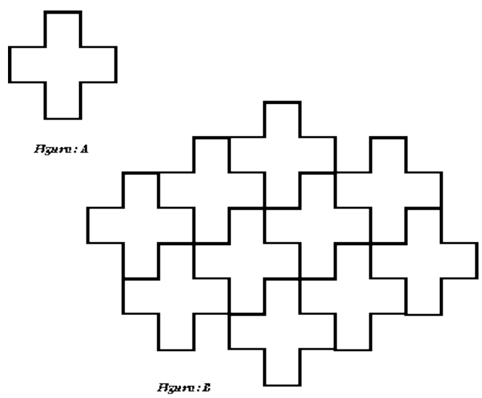


FIG 3 Ilustración de una teselación periódica regular

Una teselación semirregular consiste en una pavimentación del plano con un mosaico de polígonos regulares de vértices comunes y arbitrarios número de lados. Para la cual se resumen en una ecuación

$$\sum_{1}^{n} m_i = 2\,[1 + \sum_{1}^{n} m_i / x_i]$$

Donde m_1 representa el número de polígonos de x_1 lados que concurren en un vértice

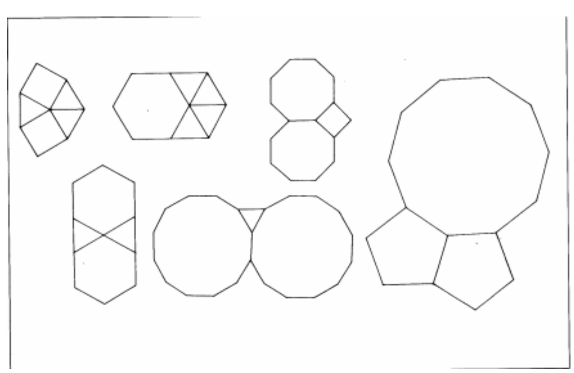


FIG 4 Ilustración de una teselación semirregular

Una teselación es “aperiódica” o no periódica cuando no tiene traslaciones que hagan que coincida consigo misma. De la misma forma es sencillo convertir una teselación periódica en aperiódica seleccionando las teselas en dos y alternando la orientación con el fin de evitar la periodicidad

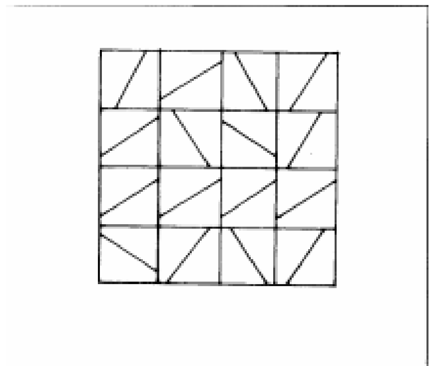


FIG 5 Ilustración de una teselación aperiódica

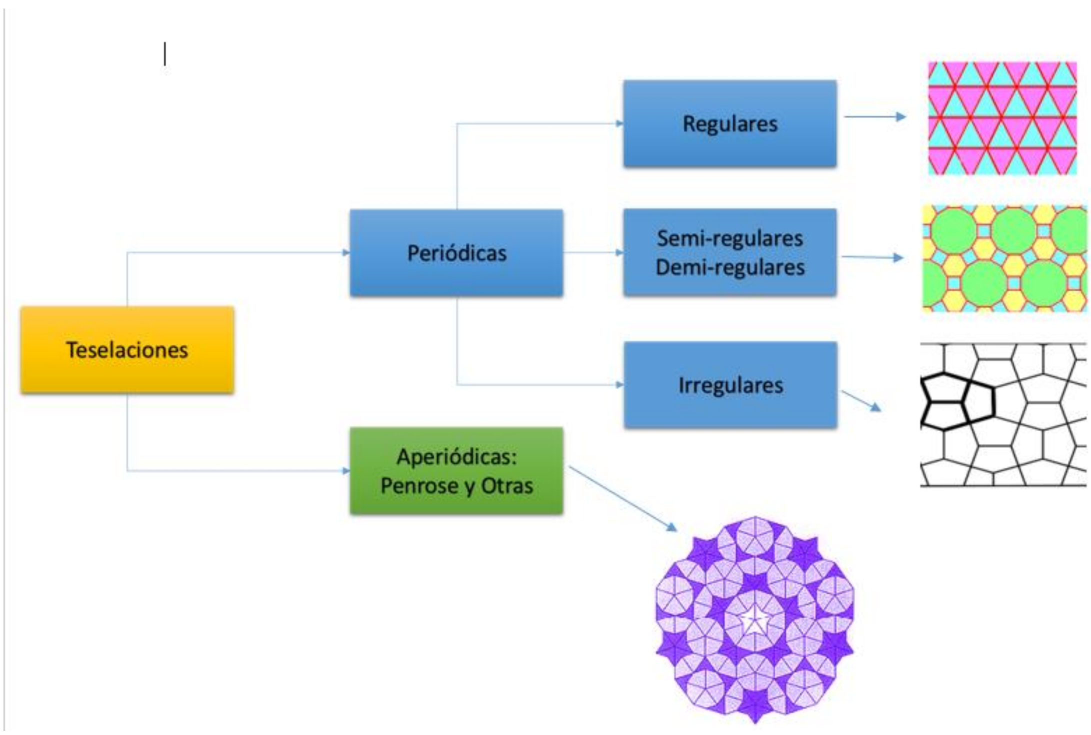


FIG Diagrama de los tipos de teselaciones

Mosaicos de polígonos regulares

Puesto que en el plano el polígono más simple es el triángulo, a partir de este se pueden analizar varios casos.
Triángulo equilátero es el nombre que le damos a un polígono regular de tres lado, y podemos cubrir el plano utilizando solo triángulos equiláteros congruentes, sin dejar huecos y sin que haya traslapes.
A un polígono regular de cuatro lados lo llamamos cuadrado, y también es claro que es posible cubrir el plano utilizando cuadrados congruentes.

De igual manera es posible formar un mosaico utilizando sólo hexágonos regulares congruentes. Esto se lograría dividiendo el hexágono en cuatro triángulos, así la suma de los ángulos interiores de un hexágono es 4 x 180°, de donde, si denotamos por β la medida de un ángulo interior del hexágono, tenemos que:

$$\beta = \frac{\text{suma de los ángulos interiores}}{6} = \frac{4 \times 180°}{6} = \frac{2 \times 180°}{3} = 120°$$

Si realizamos un análisis similar para polígonos de siete o más lados, podremos determinar la medida de los ángulos interiores de un polígono de n lados:
Primeramente, notamos que un polígono de n lados puede dividirse en n-2 triángulos, y como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, entonces la suma de los ángulos interiores de dicho polígono es (n-2) x 180°. Como este polígono posee n-ángulos interiores, si β denota la medida de cada ángulo tenemos que:

$$\beta = \frac{\text{suma de ángulos interiores}}{n} = \frac{(n-2)180°}{n} = 180° - \frac{2 \times 180°}{n}$$

En la siguiente tabla podemos ver el valor que toma β, medido en grados y radianes, para n= 3, 4, 5, 6,7 y 8.

Figura	Angulo medido en grados	Angulo medido en radianes
Triangulo	60°	$\pi/3$
Cuadrado	90°	$\pi/2$
Pentágono	108°	$3\pi/5$
Hexágono	120°	$2\pi/3$
Heptágono	158.57°	$5\pi/7$
Octágono	135°	$3\pi/4$

Si agrupamos un cierto número de estos polígonos en un vértice, para que no haya huecos ni traslapes, debemos tener que:

$$\frac{360}{\beta} = \frac{360}{\frac{(n-2) \times 180}{n}} = \frac{2n}{n-2}$$

Así para saber que valores de n son admisibles para poder formar un mosaico con polígonos convexos de n-lados, sin dejar huecos ni traslapes, nos bastara saber par que valores n, con $n \geq 3$, el número 2n es múltiplo de n-2, o dicho de otra forma, n-2 divide a 2n.

Por lo tanto si n=3, 4,6 podemos lograr esto, pero ¿Habrá algún otro valor para el cual n-2 divide a n? Tenemos que:

$$\frac{2n}{n-2} = \frac{2(n-2+2)}{n-2} = \frac{2(n-2)+4}{n-2} = 2+\frac{4}{n-2}$$

Y observamos que 2n/n-2 será un entero cuando 4/n-2 sea un entero, esto es cuando n-2 divide a 4. Como los divisores enteros de 4 son ∓ 1, ∓ 2 y ∓ 4, entonces:

$$n-2 \begin{cases} \mp 1 \\ \mp 2 \\ \mp 4 \end{cases}$$

Así los posibles valores n son -2, 0, 1, 3, 4 y 6. Como un polígono tiene al menos 3 lados, tenemos que $n \geq 3$, por ende, los únicos valores admisibles para n son 3, 4 y 6.

En particular, los únicos polígonos regulares convexos con los cuales es posible crear un mosaico plano, sin que haya huecos ni traslapes, son n=3, 4 ó 6.

Esto nos dice que, si n = 3,4 o 6, entonces es posible crear un mosaicos del piso con polígonos de n lados, pero además nos dice que si n es diferente a 3, 4 y 6 entonces no es posible crear un mosaico del piso con polígonos de n lados.

Los matemáticos denominan a esta actividad teselar el plano, o bien, embaldosar o tapizar el plano.

Por lo tanto una teselación (mosaico o embaldosado) del plano, es una descomposición del mismo en regiones, denominadas teselas, que no se traslapan ni dejan huecos. Un concepto que es importante mencionar son las regiones poligonales arista a arista, que son cuando cualesquiera dos de los polígonos que forman el mosaico comparten, un vértice, una arista completa, o bien, no comparten nada.

OBJETIVO PARTICULAR

Emplear la geometría, que es la parte de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades y las medidas de una figura en un plano o un espacio y con ayuda de ésta poder crear una figura en el plano, con ayuda de teselaciones y mosaicos.

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar un mosaico que contenga una figura (en este caso un gatito) a través del uso de teselaciones.

PROBLEMA

¿Cómo se puede construir un mosaico utilizando como referencia teselaciones?

DESARROLLO

1. Escoger una figura, de preferencia que sea un polígono regular. En nuestro caso escogimos el triángulo. Ya que se haya escogido la figura se tiene que teselar todo el plano con ella. Con los conocimientos previamente aprendidos. Como se muestra en la siguiente figura.

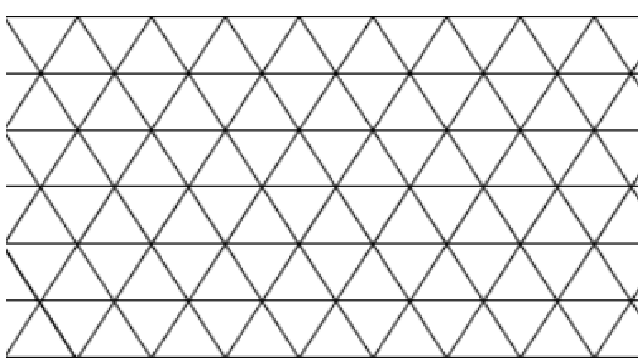
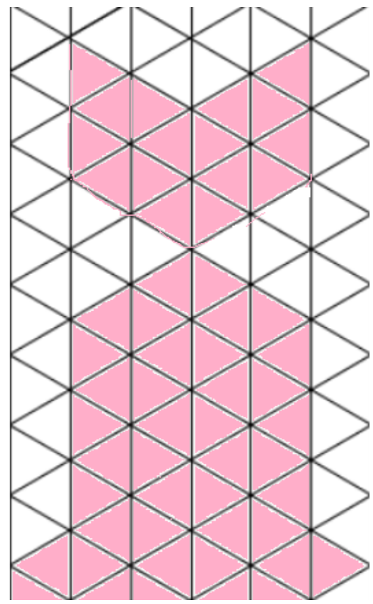


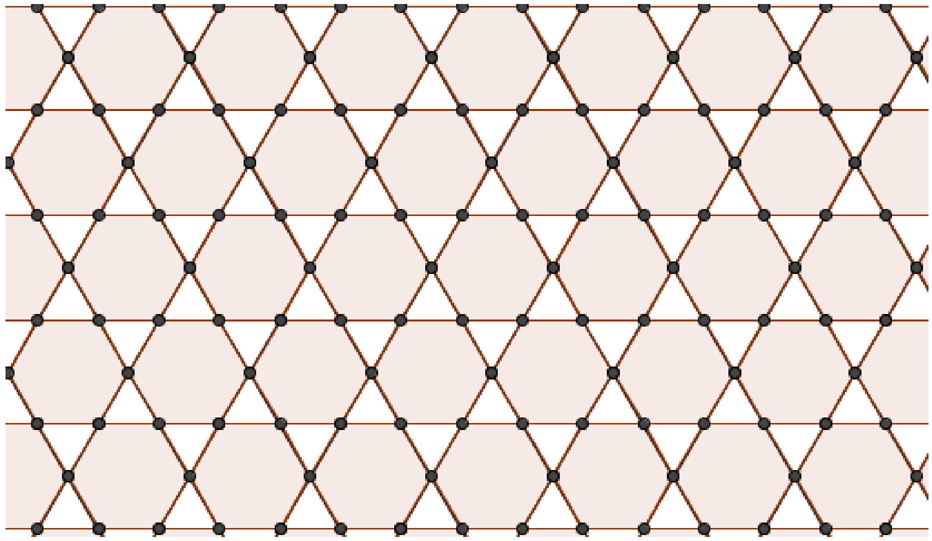
FIG Muestra de teselación, a base de polígono de 3 lados, GeoGebra

2. Ya que se ha teselado todo el plano, se escoge una figura (en nuestro caso es un gatito) la cual se va a formar en el plano ya teselado. Solamente siguiendo las líneas de los triángulos antes hechos y sin agregar ninguna otra línea.

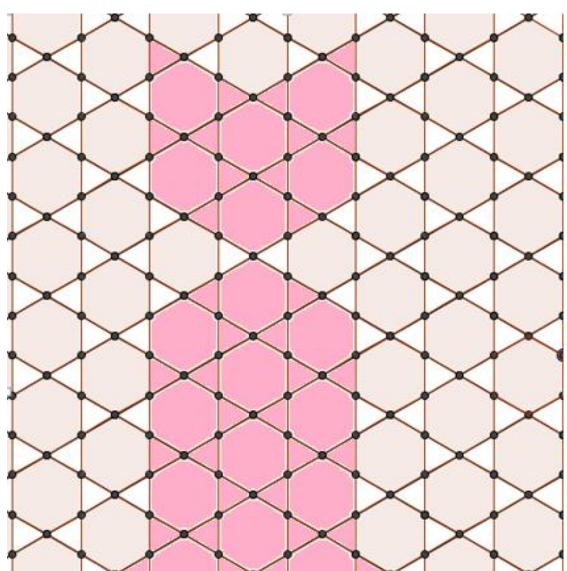


Gato en teselación

3. Ahora que ya está lista nuestra teselación. Empezaremos a formar un mosaico y para ello necesitaremos escoger dos figuras diferentes. En este caso escogimos triángulos y hexágonos y se tiene que llenar todo el plano con estas figuras como se vio anteriormente con los triángulos. Y nos tiene que quedar de la siguiente manera.



4. Ya que hemos terminado nuestro mosaico de triángulos y hexágonos. Trazaremos la misma figura del gatito, en este caso, solamente siguiendo las líneas de nuestro mosaico, para que nos quede de la siguiente manera.



Conclusiones

Entendimos la diferencia entre mosaico y teselación. Se demostró que través de una teselación se puede formar un mosaico. Puesto que en este caso primero empezamos haciendo una figura en una teselación de triángulos y posteriormente hicimos la misma figura, pero en un mosaico.

Al estudiar el comportamiento matemático en el que se desarrollan las teselaciones para formar los mosaicos donde se pueden emplear para formar figuras pudimos valorar la influencia que han tenido éstos dentro de la rama histórica, siendo parte de las construcciones antiguas, que ahora se consideran grandes obras de arte. Pero también en otras construcciones más cotidianas como son los pavimentos y pisos está la influencia de los comportamientos matemáticos. Pudimos cumplir el objetivo de representar una figura usando una teselación y un mosaico y nos dimos cuenta que este tema es muy extenso e interesante, que se puede profundizar y explorar otras teselaciones como las aperiódicas o las irregulares y entender por qué es posible su construcción a través de sus propiedades matemáticas. De esta manera podremos ver los mosaicos más bellos porque no sólo será una apreciación con los sentidos sino con el razonamiento.

REFERENCIAS

Bianconi, B. (2010). *Mosaico y teselado*. Recuperado en http://elclubdelamatematica.blogspot.mx/2010/02/mosaico-o-teselado.html el 13 de octubre de 2015.

Desconocido. (2009). *La matemática en el arte.* Recuperado en http://web.educastur.princast.es/cpr/gijon/biblioteca/recursos/arte%20y%20matematicas.pdf en noviembre de 2015.

Desconocido. (2015). Teselaciones periódicas en el plano https://modayperfume.wordpress.com/2015/07/06/teselaciones-periodicas-del-plano/ recuperado en febrero de 2016.

Giménez, J. (2009). *La proporción: arte y matemáticas.* México: Editorial Grao.

Hidalgo, L. (2007). *Mosaicos.* México: Instituto de matemáticas de la UNAM, Primera edición.

Salguero, F. (2009) *Teselaciones periódicas, aperiódicas y especiales.* Recuperado http://revistasuma.es/IMG/pdf/14/027-034.pdf en octubre de 2015.

Tsijli, T. (2012) *La belleza en las matemáticas y las matemáticas en la belleza.* Recuperado en http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Teodora-Tsijli.pdf